Université deToulon
U.F.R. de Sciences
Mathématiques

Année 2013-14
9 janvier 2015

Licence de Mathématiques - L3
Algèbre (M 54) - Examen

2h00

Exercice 1.

1. Soit G un groupe d'ordre 35. Déterminer le nombre de 7-Sylow de G. Le groupe G peut-il être simple ? Montrer que G est cyclique.

2. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_7$ est-il abélien ? Est-il simple ? Démontrer que son centre est réduit à $\{e\}$. Possède-t-il un sous-groupe d'ordre 35 ?

3. Le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})^*$ de l'anneau $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ est-il cyclique ? Combien admet-il d'éléments d'ordre 12 ?

4. On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ sur lui-même par conjugaison. Déterminer l'orbite de la permutation $\sigma = (12)(34)$. Quel est l'ordre du stabilisateur de σ ?

Exercice 2.

1. Soient A un anneau factoriel, n un entier non nul, $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ et p un élément irréductible de A. On suppose que :
(i) p ne divise pas a_n ;
(ii) p divise a_i pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$;
(iii) p^2 ne divise pas a_0.
On veut montrer qu'alors $P(X)$ est irréductible dans $K[X]$ où K est le corps des fractions de A (c'est le critère d'irréductibilité d'Eisenstein).

Supposons, par l'absurde, que $P(X)$ ne soit pas irréductible dans $K[X]$. Il existe alors $Q(X)$ et $R(X)$ dans $A[X]$ de degrés strictement inférieurs au degré de $P(X)$ tels que :

$$P(X) = Q(X)R(X) \qquad (*)$$

1.1. Montrer que l'anneau quotient $B := A/(p)$ est intègre.

1.2. Projeter l'égalité $(*)$ dans $B[X]$ (on notera $\bar{u}$ l'image de $u \in A$ dans B).

1.3. L'égalité précédente est encore vraie dans $L[X]$ où L désigne le corps des fractions de B. Rappeler pourquoi l'anneau $L[X]$ est factoriel. En déduire que X divise $\bar{Q}(X)$ et $\bar{R}(X)$. Conclure.

1.4. Le polynôme $P(X) = X^{2015} - 2015$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

2. On considère le sous-anneau de $\mathbb{C}$ suivant :

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] := \{a + ib\sqrt{7}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $z = a + ib\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$, on considère son conjugué complexe $\bar{z} = a - ib\sqrt{7}$ et sa norme $N(z) = z\bar{z}$.

2.1. Montrer que si z et z' sont deux éléments de $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ alors

$$N(zz') = N(z)N(z').$$

2.2. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ si et seulement si $N(z) = 1$. En déduire le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}[i\sqrt{7}])^*$.

2.3. Montrer que 2 puis $1 + i\sqrt{7}$ et $1 - i\sqrt{7}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ n'est pas factoriel.

L'idéal engendré par 2 dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est-il maximal ?

Exercice 3.

On considère le polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ suivant : $P(X) = X^2 - 7$.

1. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2. L'anneau quotient $\mathbb{Q}[X]/(P(X))$ est-il un corps ?

3. On considère le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

3.1. Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ est-il algébriquement clos ?

3.2. Quel est le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{7})/\mathbb{Q}$?

3.3. Montrer que l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{7})/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

3.4. Déterminer les automorphismes du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{7})/\mathbb{Q})$?

Exercice 4.

On considère une extension de corps $K/\mathbb{Q}$ galoisienne de groupe de Galois $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Combien $K/\mathbb{Q}$ admet-elle d'extensions intermédiaires ? Lesquelles sont galoisiennes sur $\mathbb{Q}$?

* * *