Université de Toulon **Année 2014-15**
U.F.R. de Sciences 24 octobre 2014
Mathématiques

Master de Mathématiques

M1 Recherche

Initiation à la recherche - Examen

2h30

Exercice.

Montrer que si G est un groupe abélien alors toute représentation linéaire irréductible de G est de dimension 1. Quelles sont les représentations linéaires irréductibles du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Dresser la table des caractères de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Problème.

On considère le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$, groupe des permutations paires sur l'ensemble à 4 éléments $\{1, 2, 3, 4\}$, sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.

1. Combien le groupe $\mathfrak{S}_4$ admet de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles ? Montrer que les seules représentations de dimension 1 de $\mathfrak{S}_4$ sont la représentation triviale et la signature.

2. On fait agir $\mathfrak{S}_4$ sur lui-même par conjugaison et on considère le 3-cycle $\sigma = (1\ 2\ 3) \in \mathfrak{S}_4$.

2.1. Quel est l'ordre du stabilisateur de σ dans $\mathfrak{S}_4$?

2.2. En déduire qu'il n'existe pas de permutation impaire qui commute avec σ.

2.3. En déduire le nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_4$.

3. Combien le groupe $\mathfrak{A}_4$ admet de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles ?

4. Soit $K = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset \mathfrak{A}_4$.

4.1. Montrer que K est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_4$.

4.2. Montrer que K est isomorphe au groupe de Klein.

4.3. Le groupe quotient $\mathfrak{A}_4/K$ est-il abélien ?

4.4. Déterminer le sous-groupe dérivé $D(\mathfrak{A}_4)$ de $\mathfrak{A}_4$.

4.5. En déduire le nombre de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de dimension 1 de $\mathfrak{A}_4$ et celui de dimension supérieure.

5. Soit χ un caractère linéaire de $\mathfrak{A}_4$, i.e. un morphisme de groupes de $\mathfrak{A}_4$ dans $\mathbb{C}^*$.

5.1. Montrer que le morphisme χ se factorise par $\mathfrak{A}_4/D(\mathfrak{A}_4)$.

5.2. En déduire que $\chi(\tau)$ est d'ordre divisant 3 pour tout $\tau \in \mathfrak{A}_4$.

5.3. En déduire les caractères de degré 1 de $\mathfrak{A}_4$.

6. Soit $\rho : \mathfrak{A}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathfrak{A}_4$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$. On rappelle que cette représentation est $\mathbb{C}^4$ muni de l'action de $\mathfrak{A}_4$ définie, dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_4)$, par $\sigma.e_i = e_{\sigma(i)}$.

De plus, on remarque que V se décompose sous la forme $V' \oplus W$ où V' est la droite engendrée par $e_1 + \cdots + e_4$ et W est l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_4 = 0$.

Soient χ_V, $\chi_{V'}$ et χ_W les caractères respectivement des représentations V, V' et W (on a $\chi_V = \chi_{V'} + \chi_W$).

6.1. Rappeler que vaut le caractère d'une représentation de permutation. En déduire les valeurs de χ_V sur les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_4$.

6.2. Montrer que $\chi_{V'}$ est le caractère trivial et en déduire les valeurs du caractère χ_W.

6.3. Montrer que le caractère χ_W est irréductible.

6.4. Dresser la table des caractères irréductibles du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

$$\int\int\int$$