Universités de Toulon & de Nice Sophia-Antipolis **Année 2014-15**
ESPE 7 janvier 2015

Master de Mathématiques - M1 MEEF

Algèbre Linéaire - UE1 - ECUE2

Examen - 3h00

Exercice. Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient f et g deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

2. Soit E un K-espace vectoriel.

2.1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$F \cap G = F + G \Longleftrightarrow F = G.$$

2.2. Soient F, G, F', et G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Montrer que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application qui associe à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa transposée ${}^tM$.

Vérifier que f est une application linéaire. Que vaut $f \circ f$? En déduire le polynôme minimal de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Quel est son polynôme caractéristique ?

Problème : racine carrée d'un endomorphisme

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f de E, l'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients réels.

Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k,$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E (où $q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1. Montrer que f est diagonalisable.

1.2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

1.3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

1.4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.

1.5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2.2.

1.6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

1.7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

2. Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1. Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.

2.2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

2.3. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

2.4. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

2.5. Après avoir calculé $p^2, q^2, p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q, qui vérifient $h^2 = f$.

2.6. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Ecrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q, dans cette nouvelle base.

2.7. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

2.8. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

2.9. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

* * *