Université de Toulon **Année 2013-14**
U.F.R. de Sciences 13 octobre 2014
Mathématiques

Master de Mathématiques - M1 Recherche

Algèbre - Contrôle continu

1. Non simplicité des groupes d'ordres 12.

Soit G un groupe d'ordre 12. On suppose que G est simple.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des 2-Sylow de G est de cardinal égal à 3.

b) Montrer que

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (g, H) & \longmapsto & g.H = gHg^{-1} \end{array}$$

définit une action de G sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des 2-Sylow de G.
Montrer que l'action est fidèle.

c) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. Conclure.

2. Un exemple de groupe d'ordre 12.

Soit $\mathfrak{A}_4$ le groupe alterné sur un ensemble à quatre éléments.

a) Décrire les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_4$.

b) Déterminer tous les 2-Sylow et tous les 3-Sylow de $\mathfrak{A}_4$.

3. Détermination de tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

Soit G un groupe d'ordre 12 et soient n_2 et n_3 le nombre de ses 2-Sylow et de ses 3-Sylow.

3.1. Montrer que les seuls couples éventuellement possibles pour (n_2, n_3) sont $(1,1)$, $(1,4)$, $(3,1)$ et $(3,4)$.

3.2. Montrer que le cas $(n_2, n_3) = (3,4)$ est impossible (compter les éléments).

3.3. Supposons que $(n_2, n_3) = (1,1)$. Montrer que G est ou bien isomorphe à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, ou bien isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et que ce sont les seuls groupes abéliens d'ordre 12 à isomorphisme près.

3.4. Supposons que $(n_2, n_3) = (1,4)$.

a) Soit $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ l'ensemble des 3-Sylow de G. On fait agir G sur $\mathcal{H}$ par $\Phi : (g, H_i) \longmapsto gH_ig^{-1}$. Déduire des théorèmes de Sylow que cette action est transitive. Quel est l'ordre du stabilisateur de H_1 ?

b) Montrer que le noyau du morphisme associé à l'action Φ est un sous-groupe distingué de G d'ordre au plus 3. En déduire que l'action Φ est fidèle.

c) Montrer que le seul sous-groupe d'ordre 12 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ est le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$. En déduire que

$$G \simeq \mathfrak{A}_4$$

Remarque : si $(n_2, n_3) = (3,1)$, on peut montrer que G est isomorphe, soit à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, soit au produit direct $D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du groupe diédral D_3 par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$$\int\int\int$$