Université de Toulon
U.F.R. de Sciences
Mathématiques

Année 2014-15
7 novembre 2014

Licence de Mathématiques - L3
Algèbre - Partiel

3h00

Les nombres 75, 15 et 6

Exercice 1. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 75.

Exercice 2. On considère le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/75\mathbb{Z})$ des automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$.

1. Quel est l'ordre du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/75\mathbb{Z})$?

2. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/75\mathbb{Z})$ est-il cyclique ?

3. Combien l'équation $x^2 - 1 = 0$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$?

Exercice 3. Soit G un groupe d'ordre 75.

1. Montrer que G n'est pas simple.

2. Montrer que le nombre d'éléments d'ordre 3 de G est soit 2 soit 50.

Exercice 4.

1. Soit G un groupe d'ordre 15. Déterminer le nombre de 3-Sylow et le nombre de 5-Sylow de G. En déduire que G est nécessairement cyclique.

2. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ possède-t-il un sous-groupe d'ordre 15 ?

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre 6. Soient H un 2-Sylow de G et K un 3-Sylow de G.

1. Montrer que K est un sous-groupe distingué de G.

2. On suppose que H est distingué dans G. Montrer qu'alors G est cyclique.

3. On suppose que H n'est pas distingué dans G. Considérons l'action par translation de G sur l'ensemble quotient G/H des classes à droite modulo H définie, pour $g \in G$ et $aH \in G/H$, par :

$$g.aH = gaH.$$

Montrer que ceci définit bien une action de groupes. Montrer que l'action est fidèle. En déduire que G est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 6. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/79\mathbb{Z}$, l'élément $\overline{6}$ $(= 6 + 79\mathbb{Z})$ est-il inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Déterminer le reste de la division euclidienne de

$$(75\,!)^{80}$$

par 79.

$$\int\int\int$$